

100 רב פפא ולא רבינא אחד

שמוחה טייטלבוים

בגמ' במסכת פסחים (טז) מבואר כי בזמן התלמוד היה מקובל "לערב סעודות" - כלומר, שני אנשים או יותר היו משקיעים סכום שווה של כסף וקונים בו סעודה, ובה היו סועדים יחדיו. מובן שלא תמיד היו כולם אוכלים בדיוק כשיעור הכסף שהוציאו, ולכן נפסק בגמרא שם שאם אחד מבני החבורה מרבה לאכול, יכולים שאר בני החבורה לתת לו מנה בשווי דמי ההשתתפות ולסלקו.

מסופר עוד שם על רב הונא בריה דרב יהושע שערך סעודה כזו עם רב פפא, ולתדהמתו גילה כי בזמן שהוא הספיק לאכול כיכר אחד, כבר סיים רב פפא את כיכרו הרביעי. בהתאם להלכה שהוזכרה לעיל, הכריח רב הונא את רב פפא לחלוק עמו שווה בשווה. בסעודתו הבאה, החליט רב הונא שלא להסתכן שוב בהסתבכות עם רב פפא, ועירב את סעודתו עם רבינא. לרוע מזלו, צרתו הוכפלה: בזמן שהצליח לסיים כיכר אחד, העלים רבינא לא פחות משמונה (!!!) כיכרות. הסיפור נחתם בתובנה שהפיק רב הונא מן הסיפור: "מאה פפי ולא חדא רבינא" (עדיף לסעוד עם מאה "רב פפא" ולא עם "רבינא" אחד).

בחישוב שטחי, אין מובן מדוע יש להעדיף מאה רב פפא על רבינא אחד. הרי כבר כאשר ישנם שני "רב פפא" בתמונה, יאכלו יחד שמונה כיכרות לעומת האחד של רב הונא, וא"כ זהו בדיוק כמו המצב עם רבינא אחד. אך כבר ציינו האחרונים (מנחם משיב נפש, מרכבת המשנה, ועוד) שיש להביא בחשבון שכל הסועדים משתתפים בעלות הסעודה בשווה. ננתח את המקרים לפי זה:

1. במקרה של הסעודה עם רבינא, שבה נאכלו 9 ככרות בסה"כ, כל אחד משני המשתתפים שילם עבור $4\frac{1}{2}$ כיכרות. מתוכם, רבינא אכל שמונה, ורב הונא אכל אחת. נמצא, שמתוך $4\frac{1}{2}$ הכיכרות שהיה אמור רב הונא לקבל, הוא קיבל רק אחת, שזהו $\frac{1}{4.5}$ מן המגיע לו.

2. בסעודה עם מאה רב פפא, נאכלות בסך הכל 401 כיכרות (4 לכל רב פפא, ועוד 1 לרב הונא). מכיוון שישנם 101 משתתפים בסעודה, נמצא שכל משתתף שילם תמורת $\frac{401}{101}$ כיכרות. רב הונא בריה דרב יהושע אכל רק כיכר אחת מתוך המגיע לו, כלומר: $\frac{401}{101} = \frac{101}{401}$. 1.

נמצא שבסעודה זו קיבל רב הונא יותר מרבע מהכמות המגיעה לו, בעוד שבסעודה עם רבינא הוא קיבל רק $\frac{1}{4.5}$. ואם כן צדקו דברי רב הונא שאמר שעדיף לאכול עם מאה רב פפא מאשר עם רבינא אחד.

למעשה, ניתן להוכיח כי לא רק שעדיף לאכול עם מאה רב פפא מאשר עם רבינא אחד, יותר מכך: עדיף לאכול עם כל מספר של רב פפא, עד אין סוף, מאשר לאכול עם רבינא אחד. נניח כי בסעודה משתתפים לא מאה רב פפא, אלא x רב פפא. מכיוון שגם רב הונא משתתף בסעודה, כלל המשתתפים בסעודה עומד על $x+1$. בזכור, כל רב פפא אוכל 4 כיכרות, ובסך הכל $4x$ כיכרות, ורב הונא אוכל כיכר נוספת, נמצא כי בסך הכל ישנן $4x+1$ כיכרות. אם נחלק את הכיכרות בשווה בין הסועדים. יקבל כל אחד $\frac{4x+1}{x+1}$ כיכרות (מספר הסועדים מספר הכיכרות). רב הונא אכל בפועל רק כיכר אחת מתוך המגיע לו, שזה: $\frac{4x+1}{4x+1} = \frac{x+1}{4x+1}$. 1. עלינו לבחון את היחס בין משוואה זו, המבטאת את היחס בין הכמות שאכל רב הונא לכמות המגיעה לו כשסעד עם x רב פפא, לבין היחס $\frac{1}{4.5}$, המבטא יחס זה בסעודה עם רבינא.

$$f(x) = \frac{x+1}{4x+1} \text{ נסמן:}$$

א. ראשית, נבדוק את נקודות החיתוך של משוואתנו עם הצירים:

$$x=0 \Rightarrow y=1. \text{ נמצא שנקודת החיתוך עם ציר ה-} y \text{ הוא ב-} (0,1).$$

$$y=0 \Rightarrow \frac{x+1}{4x+1} = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow x=-1. \text{ נקודת החיתוך עם ציר ה-} x \text{ היא ב-} (-1,0).$$

ב. בכדי לדעת אם הפונקציה עולה או יורדת, עלינו לבדוק את סימני הנגזרת שלה. נגזור את הפונקציה¹:

$$f'(x) = \frac{4x+1-4(x+1)}{(4x+1)^2} = \frac{4x+1-4x-4}{(4x+1)^2} = \frac{-3}{(4x+1)^2}$$

הביטוי שבמונה הוא שלילי, והביטוי שבמכנה הוא תמיד חיובי (מכיוון שכל מספר שמועלה בריבוע הוא חיובי). נמצא אם כן, שהנגזרת תמיד שלילית, וממילא הפונקציה תהיה תמיד במגמת ירידה.

1 נוסחת הגזירה היא: $f'(\frac{u}{v}) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

ג. לבסוף, נבדוק את ערכי האסימפטוטות² של המשוואה:

1. אסימפטוטה אופקית - כיון שהחזקה של x במונה והחזקה של x במכנה שוות, תתקבל אסימפטוטה אופקית, שערכה: $\frac{\text{המקדם של } x \text{ במונה}}{\text{המקדם של } x \text{ במכנה}}$. בפונקציה שלנו האסימפטוטה תהיה ב- $y = \frac{1}{4}$.

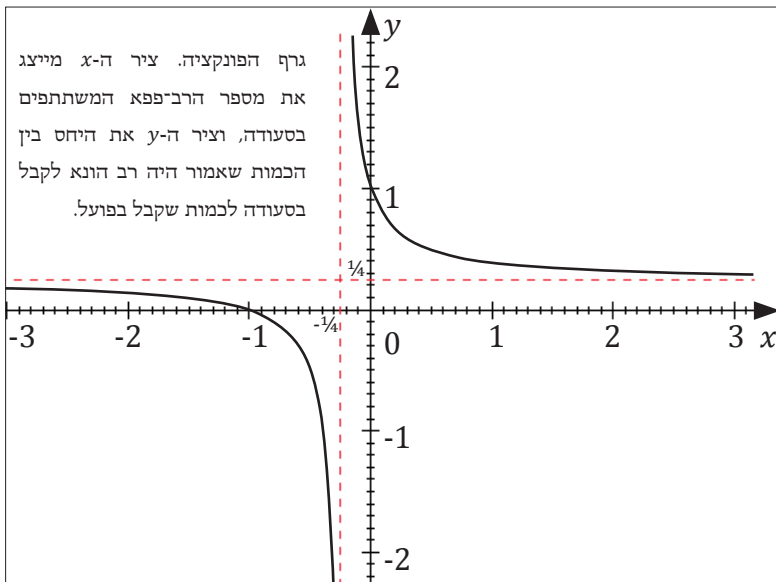
2. אסימפטוטה אנכית - תתקבל בערך המאפס את המכנה ואינו מאפס את המונה. בפונקציה שלנו: $4x+1=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$. (בערך זה המונה לא מתאפס שכן $-\frac{1}{4}+1 = \frac{3}{4}$). נסכם את מה שמצאנו:

א. לפונקציה $f(x)$ נקודות חיתוך עם הצירים ב- $(0,1)$ וב- $(-1,0)$.

ב. הפונקציה תמיד תהיה במגמת ירידה.

ג. לפונקציה אסימפטוטה אופקית ב- $y = \frac{1}{4}$ ואנכית ב- $x = -\frac{1}{4}$.

נשרטט סקיצה של גרף הפונקציה:



2 "אסימפטוטה" מייצגת ערך שהמשוואה תמיד תתקרב אליו ככל שתתקרב לאינסוף, אך לעולם לא תגיע אליו. ניתן להבין זאת יותר על פי השירטוט שיובא בהמשך.

ניתן לראות בשרטוט שגם אם x ייצג מספר גדול מאד, התוצאה שתקבל לעולם לא תהיה פחותה מ- $\frac{1}{4}$. נמצא, לפי זה, שאין משנה עם כמה רב פפא יסעד רב הונא, הוא לעולם לא יקבל פחות מ- $\frac{1}{4}$ מהמגיע לו. אולם, כפי שכבר הזכר, אם הוא יאכל עם רבינא, הוא יקבל רק $\frac{1}{4.5}$ מהמגיע לו.

לאור האמור נראה שבאמת רב הונא לא התכוון בדווקא ל-100 רב פפא, אלא שהוא רצה לבטא גוזמא, ובאמת הוא הדין ל-200 רב פפא, ל-1000 רב פפא, ולא ינסוף רב פפא!